SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1996-97

Giovanni Dore

STIME NON COERCIVE PER UN PROBLEMA IRREGOLARE DI VALORI AL CONTORNO

19 giugno 1997

Tecnoprint - Bologna 1997

Riassunto. Si provano delle stime non coercive per un problema irregolare di valori al contorno per una equazione ellittica astratta del secondo ordine dipendente da un parametro. Tali risultati vengono applicati allo studio di un problema irregolare di valori al contorno per un'equazione ellittica del secondo ordine su un dominio cilindrico, ottenendo la completezza del sistema delle autofunzioni generalizzate.

Abstract. We prove noncoercive estimates for an irregular boundary value problem for a second order elliptic differential-operator equation with a parameter. We apply these results to irregular boundary value problems for second order elliptic partial differential equations in cylindrical domains, the estimates allows to prove the completeness of the system of root functions.

1. Introduzione e notazioni

I risultati che esporrò in questo seminario sono stati ottenuti in collaborazione con Sasun Yakubov (vedi [DY]).

Se $\varphi \in [0, \pi[$ denotiamo con Σ_φ il settore chiuso $\{ z \in \mathbb{C} \mid |\arg z| \leq \varphi \} \cup \{0\}$.

Sia A un operatore chiuso, con dominio denso, in uno spazio di Banach complesso E, diciamo che A è di tipo φ con limitazione L se per ogni $\lambda \in \Sigma_\varphi$ l'operatore $A+\lambda I$ è invertibile con inverso limitato e $\|(A+\lambda I)^{-1}\| \leq \dfrac{L}{|\lambda|+1}$.

Notiamo che in particolare un operatore di tipo φ è invertibile con inverso limitato. Inoltre un operatore di tipo φ con $\varphi > \frac{\pi}{2}$ è l'opposto del generatore di un semigruppo analitico la cui norma decresce esponenzialmente all'infinito (vedi [F, Th. 4.2.2]).

Notiamo che, per le proprietà dell'operatore risolvente, se $A + \lambda I$ è invertibile per $\lambda \in [0, \infty[$ e $\sup_{\lambda \in [0,\infty[} \|(\lambda+1)(A+\lambda I)^{-1}\| < \infty$ allora esiste $\varphi > 0$ tale che A è di tipo φ.

Se A è un operatore chiuso con inverso limitato nello spazio di Banach E allora denotiamo con $E(A)$ il dominio dell'operatore A dotato della norma $\|u\|_{E(A)} = \|Au\|_E$. In tal modo $E(A)$ è uno spazio di Banach, immerso con continuità in E. Dal fatto che A ha inverso limitato segue che si è effettivamente definita una norma che è equivalente alla tradizionale $\|u\|_E + \|Au\|_E$.

$C(\cdot)$ denoterà una costante (non sempre la stessa, anche nella stessa formula) che dipende solo dalle quantità specificate.

Faremo uso della seguente disuguaglianza, valida per $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

$$|\lambda + \mu| \geq \left| \cos \frac{\arg \lambda - \arg \mu}{2} \right| (|\lambda| + |\mu|) .$$

2. Una stima di semigruppi

La seguente stima di semigruppi è la base per le successive stime per un problema di valori al contorno.

Teorema 2.1. *Sia E uno spazio di Banach complesso, A un operatore lineare chiuso in E di tipo φ con limitazione L. Inoltre siano m un intero positivo, $p \in [1, \infty[$ e $\alpha \in \left] \frac{1}{2p}, m + \frac{1}{2p} \right[$.*

Allora per $\lambda \in \Sigma_\varphi$ l'operatore $-(A+\lambda I)^{\frac{1}{2}}$ genera un semigruppo analitico.

Inoltre esiste $C \in \mathbb{R}^+$ (che dipende solo da L, φ, m, α e p) tale che per ogni $u \in (E, E(A^m))_{\frac{\alpha}{m} - \frac{1}{2mp}, p}$ e $\lambda \in \Sigma_\varphi$ si ha

$$\int_0^\infty \left\| (A+\lambda I)^\alpha e^{-x(A+\lambda I)^{\frac{1}{2}}} u \right\|^p dx \leq C \left(\|u\|^p_{(E, E(A^m))_{\frac{\alpha}{m} - \frac{1}{2mp}, p}} + |\lambda|^{p\alpha - \frac{1}{2}} \|u\|^p \right) .$$

La dimostrazione si basa su alcuni lemmi, per lo più risultati classici della teoria dell'interpolazione e delle potenze frazionarie, in cui però è necessario esplicitare la dipendenza delle stime dai parametri in gioco.

Lemma 2.2. *(vedi [Ko2, Th. 5.3]) Sia B un operatore di tipo ψ con limitazione M, con $\psi \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Inoltre sia k un intero positivo e $\beta \in \left]\frac{1}{p}, k + \frac{1}{p}\right[$.*

Allora per ogni $u \in E$ tale che $\int_0^\infty \left\| t^{\beta - \frac{1}{p}} (B(B+tI)^{-1})^k u \right\|^p \frac{dt}{t} < \infty$ si ha

$$\int_0^\infty \|B^\beta e^{-xB} u\|^p \, dx \leq C(M, \psi, k, \beta, p) \int_0^\infty \left\| t^{\beta - \frac{1}{p}} (B(B+tI)^{-1})^k u \right\|^p \frac{dt}{t} .$$

Dimostrazione. B genera un semigruppo analitico definito da

$$e^{-xB} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{x\lambda} (B + \lambda I)^{-1} \, d\lambda$$

dove Γ è la curva nel piano complesso

$$\{ \rho e^{-i\psi} \mid \rho \in [0, \infty[\} \cup \{ \rho e^{i\psi} \mid \rho \in [0, \infty[\}$$

orientata da $e^{-i\psi}\infty$ a $e^{i\psi}\infty$; inoltre per ogni h intero positivo

$$B^h e^{-xB} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (-\lambda)^h e^{x\lambda} (B + \lambda I)^{-1} \, d\lambda .$$

Da tale rappresentazione segue la stima

$$\|B^h e^{-xB}\| \leq C(M, \psi, h) x^{-h} .$$

perciò si ha

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^\infty \|B^\beta e^{-xB} u\|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_0^\infty \left\| \frac{\Gamma(2k)}{\Gamma(\beta)\Gamma(2k-\beta)} \int_0^\infty t^{\beta-1} (B(B+tI)^{-1})^{2k} e^{-xB} u \, dt \right\|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C(k,\beta) \left(\int_0^\infty \left\| \int_0^{x^{-1}} t^{\beta-1} (B(B+tI)^{-1})^k e^{-xB} (B(B+tI)^{-1})^k u \, dt \right\|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + C(k,\beta) \left(\int_0^\infty \left\| \int_{x^{-1}}^\infty t^{\beta-1} (B+tI)^{-k} B^k e^{-xB} (B(B+tI)^{-1})^k u \, dt \right\|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C(k,\beta) \left(\int_0^\infty \left(C(M,\psi) \int_0^{x^{-1}} t^{\beta-1} (M+1)^k \left\| (B(B+tI)^{-1})^k u \right\| \, dt \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + C(k,\beta) \left(\int_0^\infty \left(C(M,\psi,k) x^{-k} \int_{x^{-1}}^\infty t^{\beta-1} \frac{M^k}{t^k} \left\| (B(B+tI)^{-1})^k u \right\| \, dt \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C(M,\psi,k,\beta) \left(\int_0^\infty \left(\int_0^{x^{-1}} (tx)^{\frac{1}{p}} \left\| t^{\beta-\frac{1}{p}} (B(B+tI)^{-1})^k u \right\| \frac{dt}{t} \right)^p \frac{dx}{x} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + C(M,\psi,k,\beta) \left(\int_0^\infty \left(\int_{x^{-1}}^\infty (tx)^{\frac{1}{p}-k} \left\| t^{\beta-\frac{1}{p}} (B(B+tI)^{-1})^k u \right\| \frac{dt}{t} \right)^p \frac{dx}{x} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C(M,\psi,k,\beta) \left(\int_0^\infty \left(\int_0^y \left(\frac{y}{t} \right)^{-\frac{1}{p}} \left\| t^{\beta-\frac{1}{p}} (B(B+tI)^{-1})^k u \right\| \frac{dt}{t} \right)^p \frac{dy}{y} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + C(M,\psi,k,\beta) \left(\int_0^\infty \left(\int_y^\infty \left(\frac{y}{t} \right)^{k-\frac{1}{p}} \left\| t^{\beta-\frac{1}{p}} (B(B+tI)^{-1})^k u \right\| \frac{dt}{t} \right)^p \frac{dy}{y} \right)^{\frac{1}{p}} .
\end{aligned}$$

Utilizzando la disuguaglianza di Young per la convoluzione moltiplicativa (cioè la convoluzione in $(\mathbb{R}^+,\cdot)$ rispetto alla misura $\frac{dt}{t}$) ciascuno dei due addendi si maggiora con

$$C(k,p)\left(\int_0^\infty \left\|t^{\beta-\frac{1}{p}}(B(B+tI)^{-1})^k u\right\|^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}},$$

perciò

$$\left(\int_0^\infty \|B^\beta e^{-xB}u\|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \le C(M,\psi,k,\beta,p)\left(\int_0^\infty \left\|t^{\beta-\frac{1}{p}}(B(B+tI)^{-1})^k u\right\|^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}. \quad \blacksquare$$

Lemma 2.3. *Sia A un operatore di tipo φ con limitazione L.*

Allora per ogni $\lambda \in \Sigma_\varphi$ e $\psi < \min\left\{\pi - \frac{\varphi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right\}$ l'operatore $(A+\lambda I)^{\frac{1}{2}}$ è di tipo ψ con limitazione che dipende solo da L, φ e ψ. In particolare l'operatore $-(A+\lambda I)^{\frac{1}{2}}$ genera un semigruppo analitico.

Dimostrazione. Sia $\theta > 0$, inoltre supponiamo $\theta < \varphi$ se $\varphi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\theta < \pi - \varphi$ se $\varphi \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Per $\lambda \in \Sigma_\varphi$ e $\mu \in \Sigma_\theta$ si ha $\lambda + \mu \in \Sigma_\varphi$ perciò $A + (\lambda+\mu)I$ è invertibile e si ha

$$\|(A+(\lambda+\mu)I)^{-1}\| \le \frac{L}{|\lambda+\mu|+1} \le \frac{L}{\cos\frac{\varphi+\theta}{2}} \frac{1}{|\lambda|+|\mu|+1} \le \frac{L}{\cos\frac{\varphi+\theta}{2}} \frac{1}{|\mu|+1}. \tag{2.1}$$

Posto $D = A + \lambda I$, per ogni $\mu \in \mathbb{C}$ con parte reale positiva si ha (vedi [F, Sect. 6.4, pag. 371])

$$(D^{\frac{1}{2}} + \mu I)^{-1} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z+\mu^2}(D+zI)^{-1}\,dz. \tag{2.2}$$

Ruotando nel piano complesso la semiretta di integrazione una formula simile risulta valida anche se $\arg\mu \le \psi$, si ha cioè

$$(D^{\frac{1}{2}} + \mu I)^{-1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty e^{i\bar\theta}} \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z+\mu^2}(D+zI)^{-1}\,dz,$$

se $\bar\theta \in \mathbb{R}$ è tale che $|\bar\theta|$ soddisfa la stessa condizione di θ e $Re(\mu e^{-i\bar\theta/2}) > 0$ (cioè $\left|\arg\mu - \frac{\bar\theta}{2}\right| < \frac{\pi}{2}$).

Da tale uguaglianza segue

$$\begin{aligned}\left\|(D^{\frac{1}{2}} + \mu I)^{-1}\right\| &\le \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\rho^{\frac{1}{2}}}{|\rho e^{i\bar\theta} + \mu^2|}\left\|\left(A + (\lambda + \rho e^{i\bar\theta})I\right)^{-1}\right\| d\rho \\ &\le \int_0^\infty \frac{\rho^{\frac{1}{2}}}{\cos\frac{2\arg\mu - \bar\theta}{2}(\rho + |\mu|^2)} \frac{L}{\pi\cos\frac{\varphi+|\bar\theta|}{2}} \frac{1}{\rho+1}\,d\rho \\ &\le \frac{L}{\cos\frac{\varphi+|\bar\theta|}{2}\cos\frac{2\arg\mu-\bar\theta}{2}} \frac{1}{|\mu|}.\end{aligned}$$

Una opportuna scelta di $\bar{\theta}$ consente di concludere che per $\mu \in \Sigma_\psi \setminus \{0\}$ l'operatore $D^{\frac{1}{2}} + \mu I$ è invertibile e

$$\left\|(D^{\frac{1}{2}} + \mu I)^{-1}\right\| \leq \frac{C(L,\varphi,\psi)}{|\mu|} \,. \tag{2.3}$$

Inoltre, passando al limite per $\mu \to 0$ nell'uguaglianza (2.2) si ha l'invertibilità di $D^{\frac{1}{2}}$ con l'uguaglianza

$$(D^{\frac{1}{2}})^{-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} (D + zI)^{-1}\, dz$$

da cui segue immediatamente

$$\left\|(D^{\frac{1}{2}})^{-1}\right\| \leq C(L,\varphi) \tag{2.4}$$

e quindi si ottiene il lemma. ■

Lemma 2.4. *(vedi [G, Ch. I, Th. 3.1]) Sia B un operatore di tipo 0 con limitazione M. Inoltre sia m un intero positivo, $p \in [1,\infty[$ e $\beta \in]0,1[$.*

Se $u \in (E, E(B^m))_{\beta,p}$ allora $\left(\int_0^\infty \left\|t^{m\beta} B^m (B+tI)^{-m} u\right\|^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ e in tal caso

$$\left(\int_0^\infty \left\|t^{m\beta} B^m (B+tI)^{-m} u\right\|^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} \leq (M+1)^m \|u\|_{(E,E(B^m))_{\beta,p}} \,.$$

Dimostrazione del teorema 2.1. Per $\lambda \in \Sigma_\varphi$ poniamo $B = (A+\lambda I)^{\frac{1}{2}}$. Per il lemma 2.3 si può applicare il lemma 2.2 all'operatore B con $k = 2m$, $\beta = 2\alpha$, M che non dipende da λ e $\psi \in \left]\frac{\pi}{2}, \min\left\{\pi - \frac{\varphi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right\}\right[$ scelto in funzione di φ.

Visto che è $((A+\lambda I)^{\frac{1}{2}})^{2\alpha} = (A+\lambda I)^\alpha$ e $((A+\lambda I)^{\frac{1}{2}})^{2m} = (A+\lambda I)^m$ ([Ko1, Th. 10.6]), si ha

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \|(A+\lambda I)^\alpha e^{-x(A+\lambda I)^{\frac{1}{2}}} u\|^p \, dx = \\
&\int_0^\infty \|((A+\lambda I)^{\frac{1}{2}})^{2\alpha} e^{-x(A+\lambda I)^{\frac{1}{2}}} u\|^p \, dx \leq \\
C(L,\varphi,m,\alpha,p) &\int_0^\infty \left\|t^{2\alpha-\frac{1}{p}} ((A+\lambda I)^{\frac{1}{2}} ((A+\lambda I)^{\frac{1}{2}} + tI)^{-1})^{2m} u\right\|^p \frac{dt}{t} \leq \\
C(L,\varphi,m,\alpha,p) &\int_0^\infty \left\|(A+(\lambda+t^2)I)^m ((A+\lambda I)^{\frac{1}{2}} + tI)^{-2m}\right\|^p \times \\
&\qquad \left\|t^{2\alpha-\frac{1}{p}} (A+\lambda I)^m (A+(\lambda+t^2)I)^{-m} u\right\|^p \frac{dt}{t} \leq \\
C(L,\varphi,m,\alpha,p) &\int_0^\infty \left\|t^{2\alpha-\frac{1}{p}} (A+\lambda I)^m (A+(\lambda+t^2)I)^{-m} u\right\|^p \frac{dt}{t} \,,
\end{aligned}$$

visto che per $t \in \mathbb{R}^+$ è

$$\left\|(A+(\lambda+t^2)I)^m ((A+\lambda I)^{\frac{1}{2}} + tI)^{-2m}\right\| \leq C(L,\varphi) \,.$$

Dalla disuguaglianza di convessità per le potenze di operatori segue che per ogni $v \in E(A^m)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ si ha

$$\|(A+\lambda I)^m v\| = \left\|\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \lambda^j A^{m-j} v\right\| \leq C(L,m)\,(|\lambda|^m \|v\| + \|A^m v\|)\ .$$

Perciò si ha

$$\int_0^\infty \|(A+\lambda I)^\alpha e^{-x(A+\lambda I)^{\frac{1}{2}}} u\|^p\, dx \leq$$

$$C(L,\varphi,m,\alpha,p) \int_0^\infty \left\|t^{2\alpha-\frac{1}{p}} A^m (A+(\lambda+t^2)I)^{-m} u\right\|^p \frac{dt}{t} +$$

$$C(L,\varphi,m,\alpha,p) \int_0^\infty \left\|t^{2\alpha-\frac{1}{p}} \lambda^m (A+(\lambda+t^2)I)^{-m} u\right\|^p \frac{dt}{t}\ .$$

Utilizzando il lemma 2.4, otteniamo

$$\int_0^\infty \left\|t^{2\alpha-\frac{1}{p}} A^m (A+(\lambda+t^2)I)^{-m} u\right\|^p \frac{dt}{t} =$$

$$2\int_0^\infty \left\|s^{\alpha-\frac{1}{2p}} A^m (A+(\lambda+s)I)^{-m} u\right\|^p \frac{ds}{s} \leq$$

$$2\int_0^\infty \|(A+sI)^m (A+(\lambda+s)I)^{-m}\|^p \left\|s^{\alpha-\frac{1}{2p}} A^m (A+sI)^{-m} u\right\|^p \frac{ds}{s}$$

ma per $s \in \mathbb{R}^+$ si ha $\|(A+sI)^m (A+(\lambda+s)I)^{-m}\|^p \leq C(L,\varphi,m,p)$ e quindi

$$\int_0^\infty \left\|t^{2\alpha-\frac{1}{p}} A^m (A+(\lambda+t^2)I)^{-m} u\right\|^p \frac{dt}{t} \leq C(L,\varphi,m,\alpha,p)\|u\|^p_{(E,E(A^m))_{\frac{\alpha}{m}-\frac{1}{2mp},p}}\ ;$$

d'altra parte

$$\int_0^\infty \left\|t^{2\alpha-\frac{1}{p}} \lambda^m (A+(\lambda+t^2)I)^{-m} u\right\|^p \frac{dt}{t} \leq$$

$$C(L,\varphi,m,p)|\lambda|^{mp} \int_0^\infty \left(\frac{t^{2\alpha-\frac{1}{p}}}{(|\lambda|+t^2)^m}\right)^p \frac{dt}{t} \|u\|^p =$$

$$C(L,\varphi,m,p)|\lambda|^{mp} \int_0^\infty \left(\frac{(s\sqrt{|\lambda|}\,)^{2\alpha-\frac{1}{p}}}{(|\lambda|+(s\sqrt{|\lambda|}\,)^2)^m}\right)^p \frac{ds}{s} \|u\|^p =$$

$$C(L,\varphi,m,\alpha,p)|\lambda|^{p\alpha-\frac{1}{2}} \|u\|^p\ . \ \blacksquare$$

Lemma 2.5. *Sia A un operatore di tipo φ.*
Allora
a) per $\lambda \in \Sigma_\varphi$ e $0 \leq \alpha \leq \beta$

$$\|A^\alpha (A+\lambda I)^{-\beta}\| \leq C(\alpha,\beta)(1+|\lambda|)^{\alpha-\beta};$$

b) per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^+$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, *esiste* $\omega > 0$ *tale che per* $x \geq x_0$ *e* $\lambda \in \Sigma_\varphi$

$$\|(A+\lambda I)^\alpha e^{-x(A+\lambda I)^{\frac{1}{2}}}\| \leq C(\alpha) e^{-\omega x|\lambda|^{\frac{1}{2}}}.$$

Dimostrazione. a). Nel caso $0 \leq \alpha < \beta$ la stima segue dalla uguaglianza (vedi [Kr2, §5])

$$A^\alpha (A+\lambda I)^{-\beta} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \mu^\alpha (\mu+\lambda)^{-\beta} (\mu I - A)^{-1} \, d\mu,$$

Nel caso $0 \leq \alpha = \beta$ è invece necessario stimare l'operatore $B_\lambda = A^\alpha (A+\lambda I)^{-\alpha} - A(A+\lambda I)^{-1}$; dalla uguaglianza

$$B_\lambda u = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\mu^{\alpha-1}(\mu+\lambda)^{-\alpha} - (\mu+\lambda)^{-1})(\mu I - A)^{-1} A u \, d\mu \,,$$

valida per $u \in \mathcal{D}(A)$, si ottiene una stima valida per ogni u in E.

b). La stima si ottiene facilmente a partire dall'uguaglianza

$$(A+\lambda I)^\alpha e^{-x(A+\lambda I)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\mu+\lambda)^\alpha e^{-x(\mu+\lambda)^{\frac{1}{2}}} (\mu I - A)^{-1} \, d\mu \,. \quad \blacksquare$$

3. Problemi irregolari per equazioni differenziali ellittiche astratte del secondo ordine

Otterremo ora una stima non coerciva per un problema di valori al contorno irregolare per una equazione ellittica dipendente da un parametro.

Siano H e H_1 spazi di Hilbert con H_1 immerso con continuità in H. Indichiamo con $W_p^k(]0,1[\,; H_1, H)$ lo spazio delle funzioni in $L_p(]0,1[\,; H_1)$ con derivata k-sima in $L_p(]0,1[\,; H)$ munito della norma

$$\|u\|_{W_p^k(]0,1[;H_1,H)} = \|u\|_{L_p(]0,1[;H_1)} + \|u^{(k)}\|_{L_p(]0,1[;H)} \,.$$

Consideriamo, in uno spazio di Hilbert H, un problema di valori al bordo irregolare in $]0,1[$ per l'equazione differenziale ellittica del secondo ordine

$$L(\lambda, D)u = \lambda u(x) - u''(x) + Au(x) + B(x)u(x) = f(x) \qquad x \in]0,1[\tag{3.1}$$

$$L_1 u = \alpha u'(0) + \beta u'(1) + \gamma u(0) + \delta u(1) = f_1$$
$$L_2 u = \alpha u(0) - \beta u(1) = f_2 \tag{3.2}$$

dove λ è un parametro spettrale, α, β, γ, δ sono numeri complessi, A e $B(x)$ sono operatori, in generale illimitati, in H.

Consideriamo anzitutto la parte principale del problema (3.1)–(3.2), con dato nullo e condizioni non omogenee:

$$L_0(\lambda, D)u = -u''(x) + (A+\lambda I)u(x) = 0, \qquad x \in]0,1[, \tag{3.3}$$

$$L_{10} u = \alpha u'(0) + \beta u'(1) + \gamma u(0) + \delta u(1) = f_1,$$
$$L_{20} u = \alpha u(0) - \beta u(1) = f_2. \tag{3.4}$$

Teorema 3.1. *Siano* $p \in]1,\infty[$, $\varphi \in [0,\pi[$. *Supponiamo che siano soddisfatte le seguenti condizioni:*

(1) A *è un operatore di tipo* φ *in uno spazio di Hilbert* H ;
(2) $\theta = -\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Allora per ogni $\lambda \in \Sigma_\varphi$ *con* $|\lambda|$ *sufficientemente grande, qualunque siano* $f_k \in (H, H(A^2))_{\frac{k+1}{4}-\frac{1}{4p},p}$, *(k=1,2), il problema (3.3)-(3.4) ha una sola e una sola soluzione* u *in* $W_p^2(]0,1[;H(A),H)$ *e valgono le stime*

$$
\begin{aligned}
&|\lambda|\,\|u\|_{L_p(]0,1[;H)} + \|u''\|_{L_p(]0,1[;H)} + \|Au\|_{L_p(]0,1[;H)} \\
&\qquad \le C\sum_{k=1}^{2}\Big(\|f_k\|_{(H,H(A^2))_{\frac{k+1}{4}-\frac{1}{4p},p}} + |\lambda|^{\frac{k+1}{2}-\frac{1}{2p}}\|f_k\|\Big)\,,
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

$$
\begin{aligned}
&|\lambda|^{\frac12}\|u\|_{L_p(]0,1[;H)} + \|u'\|_{L_p(]0,1[;H)} + \|A^{\frac12}u\|_{L_p(]0,1[;H)} \\
&\qquad \le C\sum_{k=1}^{2}\Big(\|f_k\|_{(H,H(A))_{\frac{k}{2}-\frac{1}{2p},p}} + |\lambda|^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2p}}\|f_k\|\Big)\,.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Dimostrazione. Ogni soluzione dell'equazione (3.3) nello spazio $W_p^2(]0,1[;H(A),H)$ è del tipo

$$
u(x) = e^{-x(A+\lambda I)^{\frac12}}g_1 + e^{-(1-x)(A+\lambda I)^{\frac12}}g_2,
\tag{3.7}
$$

dove $g_k \in (H,H(A))_{1-\frac{1}{2p},p}$ (vedi [Ya4]). Tale funzione soddisfa le condizioni (3.4) se e solo se

$$
\begin{aligned}
&\big[-\alpha(A+\lambda I)^{\frac12} - \beta(A+\lambda I)^{\frac12}e^{-(A+\lambda I)^{\frac12}} + \gamma I + \delta e^{-(A+\lambda I)^{\frac12}}\big]g_1 \\
&\quad + \big[\alpha(A+\lambda I)^{\frac12}e^{-(A+\lambda I)^{\frac12}} + \beta(A+\lambda I)^{\frac12} + \gamma e^{-(A+\lambda I)^{\frac12}} + \delta I\big]g_2 = f_1, \\
&\big[\alpha I - \beta e^{-(A+\lambda I)^{\frac12}}\big]g_1 + \big[\alpha e^{-(A+\lambda I)^{\frac12}} - \beta I\big]g_2 = f_2.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Il determinante di tale sistema ha la forma

$$
D(\lambda) = \theta + R(\lambda),
$$

con

$$
\begin{aligned}
R(\lambda) = &\big[C_1(A+\lambda I)^{\frac12} + C_2 I\big]e^{-(A+\lambda I)^{\frac12}} \\
&+ \big[C_3(A+\lambda I)^{\frac12} + C_4 I\big]e^{-2(A+\lambda I)^{\frac12}}.
\end{aligned}
$$

dove le costanti C_k sono numeri complessi. Allora dal lemma 2.5 segue che

$$
\lim_{|\lambda|\to\infty}\|R(\lambda)\| = 0\,.
$$

La condizione 2, garantisce quindi che il sistema (3.8) ha una e una sola soluzione qualunque sia $\lambda \in \Sigma_\varphi$ con $|\lambda|$ sufficientemente grande e inoltre, per $k = 1, 2$, .

$$(3.9) \qquad g_k = \left[C_{1k} + (A+\lambda I)^{-\frac{1}{2}} R_{1k}(\lambda)\right] f_1 + \left[C_{2k}(A+\lambda I)^{\frac{1}{2}} + (A+\lambda I)^{-\frac{1}{2}} R_{2k}(\lambda)\right] f_2$$

con i C_{jk} numeri complessi; sostituendo (3.9) in (3.7) otteniamo

$$(3.10) \qquad \begin{aligned} u(x) = \sum_{k=1}^{2} \Big\{ &\left[C_{k1}(A+\lambda I)^{\frac{k-1}{2}} + (A+\lambda I)^{-\frac{1}{2}} R_{k1}(\lambda)\right] e^{-x(A+\lambda I)^{\frac{1}{2}}} \\ &+ \left[C_{k2}(A+\lambda I)^{\frac{k-1}{2}} + (A+\lambda I)^{-\frac{1}{2}} R_{k2}(\lambda)\right] e^{-(1-x)(A+\lambda I)^{\frac{1}{2}}} \Big\} f_k \,. \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$(3.11) \qquad \begin{aligned} &|\lambda| \|u\|_{L_p(]0,1[);H)} + \|u''\|_{L_p(]0,1[;H)} + \|Au\|_{L_p(]0,1[;H)} \\ &\le C \sum_{k=1}^{2} \Bigg\{ |\lambda| \Bigg[\left(\int_0^1 \|(A+\lambda I)^{\frac{k-1}{2}} e^{-x(A+\lambda I)^{\frac{1}{2}}} f_k\|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \|R_{k1}(\lambda)\| \left(\int_0^1 \|(A+\lambda I)^{-\frac{1}{2}} e^{-x(A+\lambda I)^{\frac{1}{2}}} f_k\|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \left(\int_0^1 \|(A+\lambda I)^{\frac{k-1}{2}} e^{-(1-x)(A+\lambda I)^{\frac{1}{2}}} f_k\|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \|R_{k2}(\lambda)\| \left(\int_0^1 \|(A+\lambda I)^{-\frac{1}{2}} e^{-(1-x)(A+\lambda I)^{\frac{1}{2}}} f_k\|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \Bigg] \\ &\quad + (1 + \|A(A+\lambda I)^{-1}\|) \Bigg[\left(\int_0^1 \|(A+\lambda I)^{\frac{k+1}{2}} e^{-x(A+\lambda I)^{\frac{1}{2}}} f_k\|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \|R_{k1}(\lambda)\| \left(\int_0^1 \|(A+\lambda I)^{\frac{1}{2}} e^{-x(A+\lambda I)^{\frac{1}{2}}} f_k\|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \left(\int_0^1 \|(A+\lambda I)^{\frac{k+1}{2}} e^{-(1-x)(A+\lambda I)^{\frac{1}{2}}} f_k\|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \|R_{k2}(\lambda)\| \left(\int_0^1 \|(A+\lambda I)^{\frac{1}{2}} e^{-(1-x)(A+\lambda I)^{\frac{1}{2}}} f_k\|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \Bigg] \Bigg\} \,. \end{aligned}$$

Per il teorema 2.1, il primo termine del membro destro di (3.11) si maggiora con:

$$\begin{aligned} &|\lambda| \left(\int_0^1 \|(A+\lambda I)^{\frac{k-1}{2}} e^{-x(A+\lambda I)^{\frac{1}{2}}} f_k\|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le C|\lambda| \, \|(A+\lambda I)^{-1}\| \left(\int_0^1 \|(A+\lambda I)^{\frac{k+1}{2}} e^{-x(A+\lambda I)^{\frac{1}{2}}} f_k\|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le C \left(\|f_k\|_{(H,H(A^2))_{\frac{k+1}{4} - \frac{1}{4p}, p}} + |\lambda|^{\frac{k+1}{2} - \frac{1}{2p}} \|f_k\| \right) \,. \end{aligned}$$

Per il lemma 2.5 e il teorema 2.1, il secondo termine si maggiora con:

$$|\lambda|\,\|R_{k1}(\lambda)\|\left(\int_0^1 \|(A+\lambda I)^{-\frac{1}{2}}e^{-x(A+\lambda I)^{\frac{1}{2}}}f_k\|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C|\lambda|\,\|(A+\lambda I)^{-1-\frac{k}{2}}\|\,\|R_{k1}(\lambda)\|\left(\int_0^1 \|(A+\lambda I)^{\frac{k+1}{2}}e^{-x(A+\lambda I)^{\frac{1}{2}}}f_k\|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C\left(\|f_k\|_{(H,H(A^2))_{\frac{k+1}{4}-\frac{1}{4p},p}} + |\lambda|^{\frac{k+1}{2}-\frac{1}{2p}}\|f_k\|\right).$$

Gli altri addendi si maggiorano in modo simile. Ciò prova (3.5).
Per ottenere (3.6) si procede in modo analogo. ■

Consideriamo ora il caso non omogeneo, cioè

$$L_0(\lambda,D)u = -u''(x) + (A+\lambda I)u(x) = f(x) \qquad x\in\,]0.1[\tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} L_{10}u &= \alpha u'(0) + \beta u'(1) + \gamma u(0) + \delta u(1) = f_1 \\ L_{20}u &= \alpha u(0) - \beta u(1) = f_2\,. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Teorema 3.2. *Siano* $p\in\,]1,\infty[$, $\varphi\in[0,\pi[$. *Supponiamo che siano soddisfatte le seguenti condizioni:*

(1) A *è un operatore di tipo* φ *in uno spazio di Hilbert* H;
(2) $\theta = -\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Allora per ogni $\lambda\in\Sigma_\varphi$ *con* $|\lambda|$ *sufficientemente grande, qualunque siano* $f\in L_p(]0,1[;H(A^{1/2}))$, $f_k\in(H,H(A^2))_{\frac{k+1}{4}-\frac{1}{4p},p}$, *(k=1,2), il problema (3.12)-(3.13) ha una sola e una sola soluzione* u *in* $W_p^2(]0,1[;H(A),H)$ *e vale la stima*

$$\begin{aligned} &|\lambda|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L_p(]0,1[;H)} + \|u'\|_{L_p(]0,1[;H)} + \|A^{\frac{1}{2}}u\|_{L_p(]0,1[;H)} \\ &\leq C\left(\|f\|_{L_p(]0,1[;H)} + \sum_{k=1}^{2}\left(\|f_k\|_{(H,H(A))_{\frac{k}{2}-\frac{1}{2p},p}} + |\lambda|^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2p}}\|f_k\|\right)\right). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Dimostrazione. Una soluzione del problema (3.12)-(3.13) è della forma $u = u_1 + u_2$, dove u_1 è la restrizione a $[0,1]$ della soluzione $\tilde{u}_1$ dell'equazione

$$L_0(\lambda,D)\tilde{u}_1 = \tilde{f}(x), \qquad x\in\mathbb{R}, \tag{3.15}$$

(essendo $\tilde{f}$ il prolungamento di f a $\mathbb{R}$ nullo fuori da $[0,1]$), mentre u_2 è una soluzione del problema

$$L_0(\lambda,D)u_2 = 0 \qquad L_{k0}u_2 = f_k - L_{k0}u_1 \qquad k=1,2\,. \tag{3.16}$$

La soluzione di (3.15) è data da

$$\tilde{u}_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{i\mu x}L_0(\lambda,i\mu)^{-1}F\tilde{f}(\mu)\,d\mu\,, \tag{3.17}$$

dove $F\tilde{f}$ è la trasformata di Fourier della funzione $\tilde{f}$ e

$$L_0(\lambda,\sigma) = -\sigma^2 I + A + \lambda I.$$

Utilizzando la versione vettoriale del teorema dei moltiplicatori di Mihlin (vedi [DS, Ch.XI, 11.29]) si prova che per ogni $\tilde{f} \in L_p(\mathbb{R}; H(A^{\frac{1}{2}}))$ è $\tilde{u}_1 \in W_p^2(\mathbb{R}; H(A^{\frac{3}{2}}), H(A^{\frac{1}{2}}))$ con

$$\|\tilde{u}_1\|_{W_p^2(\mathbb{R};H(A^{\frac{3}{2}}),H(A^{\frac{1}{2}}))} \le C\|\tilde{f}\|_{L_p(\mathbb{R};H(A^{\frac{1}{2}}))} \tag{3.18}$$

e perciò $u_1 \in W_p^2(]0,1[;H(A^{\frac{3}{2}}),H(A^{\frac{1}{2}})) \subset W_p^2(]0,1[;H(A),H)$. Da ciò segue che

$$u_1'(0), u_1'(1) \in (H(A^{\frac{1}{2}}), H(A^{\frac{3}{2}}))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p} = (H, H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{4p},p}$$

$$u_1(0), u_1(1) \in (H(A^{\frac{1}{2}}), H(A^{\frac{3}{2}}))_{1-\frac{1}{2p},p} = (H, H(A^2))_{\frac{3}{4}-\frac{1}{4p},p},$$

e quindi si ha

$$L_{10}u_1 \in (H, H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{4p},p}, \qquad L_{20}u_1 \in (H, H(A^2))_{\frac{3}{4}-\frac{1}{4p},p}.$$

Dal teorema 3.1 segue allora che il problema (3.16) ha una unica soluzione u_2 in $W_p^2(]0,1[;H(A),H)$ per $\lambda \in \Sigma_\varphi$ con $|\lambda|$ sufficientemente grande.

In modo del tutto analogo si prova che il problema (3.15) ha una unica soluzione in $W_p^2(]0,1[;H(A),H)$ per ogni $f \in L_p(]0,1[;H)$ per $|\lambda|$ sufficientemente grande e

$$|\lambda|\,\|u_1\|_{L_p(]0,1[;H)} + \|u_1\|_{W_p^2(]0,1[;H(A),H)} \le C\|f\|_{L_p(]0,1[;H)}. \tag{3.19}$$

Dal teorema 3.1 per una soluzione del problema (3.16) si ha

$$\begin{aligned}
&|\lambda|^{\frac{1}{2}}\|u_2\|_{L_p(]0,1[;H)} + \|u_2\|_{W_p^1(]0,1[;H)} + \|A^{\frac{1}{2}}u_2\|_{L_p(]0,1[;H)} \\
&\le C\sum_{k=1}^{2}\left(\|f_k - L_{k0}u_1\|_{(H,H(A))_{\frac{k}{2}-\frac{1}{2p},p}} + |\lambda|^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2p}}\|f_k - L_{k0}u_1\|\right) \\
&\le C\sum_{k=1}^{2}\Big(\|f_k\|_{(H,H(A))_{\frac{k}{2}-\frac{1}{2p},p}} + |\lambda|^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2p}}\|f_k\| \\
&\quad + \|u_1^{(2-k)}\|_{C([0,1];(H,H(A))_{\frac{k}{2}-\frac{1}{2p},p})} + |\lambda|^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2p}}\|u_1^{(2-k)}\|_{C([0,1];H)}\Big).
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Stimando in modo simile al precedente le norme di u_1 e u_1' si ottiene (3.14). ■

Teorema 3.3. *Siano $p \in]1,\infty[$, $\varphi \in [0,\pi[$. Supponiamo che siano soddisfatte le seguenti condizioni:*

(1) *A è un operatore di tipo φ in uno spazio di Hilbert H;*
(2) *l'immersione $H(A) \subset H$ è compatta;*
(3) *$\alpha\delta + \beta\gamma \neq 0$;*
(4) *per ogni $\varepsilon > 0$ e per quasi ogni $x \in [0,1]$*

$$\|B(x)u\|_{H(A^{\frac{1}{2}})} \le \varepsilon\|u\|_{H(A)} + C(\varepsilon)\|u\|, \qquad u \in D(A),$$

$$\|B(x)u\| \le \varepsilon\|u\|_{H(A^{\frac{1}{2}})} + C(\varepsilon)\|u\|, \qquad u \in D(A^{\frac{1}{2}}),$$

la funzione $x \mapsto B(x)u$ per $u \in D(A)$ è misurabile a valori in $H(A^{\frac{1}{2}})$ e per $u \in D(A^{\frac{1}{2}})$ è misurabile a valori in H.

Allora per ogni $\lambda \in \Sigma_\varphi$ *con* $|\lambda|$ *sufficientemente grande, qualunque siano* $f \in L_p(]0,1[;H(A^{1/2}))$, $f_k \in (H, H(A^2))_{\frac{k+1}{4}-\frac{1}{4p},p}$, *(k=1,2), il problema (3.1)-(3.2) ha una e una sola soluzione* u *in* $W_p^2(]0,1[;H(A),H)$ *e vale la stima*

$$
\begin{aligned}
&|\lambda|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L_p(]0,1[;H)} + \|u'\|_{L_p(]0,1[;H)} + \|A^s u\|_{L_p(]0,1[;H)} \\
&\leq C\left(\|f\|_{L_p(]0,1[;H)} + \sum_{k=1}^{2}\left(\|f_k\|_{(H,H(A))_{\frac{k}{2}-\frac{1}{2p},p}} + |\lambda|^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2p}}\|f_k\|\right)\right).
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

Dimostrazione. Sia $u \in W_p^2(]0,1[;H(A),H)$ soluzione di (3.1)-(3.2). Allora

$$
L_0(\lambda, D)u(x) = f(x) - B(x)u(x), \qquad L_{10}u = f_1, \qquad L_{20}u = f_2,
$$

dove $L_0(\lambda, D)$ e L_{k0} sono definita da (3.3)-(3.4). Dal teorema 3.2 segue

$$
\begin{aligned}
&|\lambda|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L_p(]0,1[;H)} + \|u\|_{W_p^1(]0,1[;H)} + \|A^{\frac{1}{2}}u\|_{L_p(]0,1[;H)} \\
&\leq C\left(\|f - Bu\|_{L_p(]0,1[;H)} + \sum_{k=1}^{2}\left(\|f_k\|_{(H,H(A))_{\frac{k}{2}-\frac{1}{2p},p}} + |\lambda|^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2p}}\|f_k\|\right)\right),
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

ma

$$
\begin{aligned}
\|f - Bu\|_{L_p(]0,1[;H)} \leq{}& \|f\|_{L_p(]0,1[;H)} + \varepsilon\left(\|u\|_{W_p^1(]0,1[;H)} + \|A^{\frac{1}{2}}u\|_{L_p(]0,1[;H)}\right) \\
&+ C(\varepsilon)\|u\|_{L_p(]0,1[;H)}
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

e quindi da (3.22)-(3.23)

$$
\begin{aligned}
&(1 - C\varepsilon - C(\varepsilon)|\lambda|^{-\frac{1}{2}})\left(|\lambda|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L_p(]0,1[;H)} + \|u\|_{W_p^1(]0,1[;H)} + \|A^{\frac{1}{2}}u\|_{L_p(]0,1[;H)}\right) \\
&\leq C\left(\|f\|_{L_p(]0,1[;H)} + \sum_{k=1}^{2}\left(\|f_k\|_{(H,H(A))_{\frac{k}{2}-\frac{1}{2p},p}} + |\lambda|^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2p}}\|f_k\|\right)\right).
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

Scegliendo $\varepsilon_0 > 0$ tale che $C\varepsilon_0 < 1$ e successivamente $|\lambda|$ tale che $C\varepsilon_0 + C(\varepsilon_0)|\lambda|^{-\frac{1}{2}} < 1$, da (3.24) si ha (3.21) e quindi la unicità della soluzione.

Utilizzando il teorema 3.2, la compattezza dell'immersione di $H(A)$ in H e le condizioni sull'operatore B si può provare che l'operatore $\mathbb{L}(\lambda) = (L(\lambda, D), L_1, L_2)$ da $W_p^2(]0,1[;H(A),H)$ a

$$
L_p(]0,1[;H(A^{\frac{1}{2}})) \dot{+} (H, H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{4p},p} \dot{+} (H, H(A^2))_{\frac{3}{4}-\frac{1}{4p},p},
$$

è un operatore di Fredholm.

Dall'unicità e dalla proprietà di Fredholm segue la esistenza di una soluzione. ■

4. Coercività con difetto e completezza del sistema delle autofunzioni generalizzate di un problema al bordo ellittico irregolare

Consideriamo ora un problema irregolare di valori al bordo per operatori ellittici, per tale problema alcune proprietà dei problemi regolari risultano valide in forma modificata. Infatti il problema non è coercivo, ma è coercivo con difetto; c'è decrescenza del risolvente ma non decrescenza massimale; il sistema degli autovettori generalizzati non costituisce una base, ma è completo.

Dato un dominio limitato $G \subset \mathbb{R}^r$ $(r \geq 2)$ consideriamo sul cilindro $\Omega = [0,1] \times G$ il seguente problema irregolare di valori al bordo per un operatore ellittico del secondo ordine

$$\begin{aligned} L(\lambda, D)u = \lambda u(x,y) - D_x^2 u(x,y) - \sum_{i,j=1}^{r} a_{ij}(y) D_i D_j u(x,y) \\ + \sum_{j=1}^{r} b_j(y) D_j u(x,y) + b(x,y)u(x,y) = f(x,y), \qquad (x,y) \in [0,1] \times G, \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} L_1 u = \alpha D_x u(0,y) + \beta D_x u(1,y) + \gamma u(0,y) + \delta u(1,y) = f_1(y), \qquad y \in G, \\ L_2 u = \alpha u(0,y) - \beta u(1,y) = f_2(y), \qquad y \in G, \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$Lu = u(x,y') = 0, \qquad (x,y') \in [0,1] \times \partial G, \tag{4.3}$$

con $y = (y_1, \ldots, y_r) \in \mathbb{R}^r$.

Consideriamo gli spazi

$$B^s_{2,p}(G) = (W_2^{s_0}(G), W_2^{s_1}(G))_{\theta,p},$$

con s_0, s_1 interi non negativi, $0 < \theta < 1$, $1 < p < \infty$, $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$

$$W_2^s(G) = B^s_{2,2}(G) = (W_2^{s_0}(G), W_2^{s_1}(G))_{\theta,2},$$

con $s > 0$ non intero,

$$W^{1,s}_{p,2}(\Omega) = W_p^1(]0,1[; W_2^s(G)),$$

con $s \in \mathbb{R}$; poniamo inoltre

$$Pu = -\sum_{i,j=1}^{r} a_{ij}(y) D_i D_j u(y) + \sum_{j=1}^{r} b_j(y) D_j u(y).$$

Teorema 4.1. *Supponiamo che siano soddisfatte le seguenti condizioni:*

(1) $a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\overline{G})$, *con* $\alpha \in]0,1[$, $b_j \in L_p(G)$, $b \in C^1(\overline{\Omega})$, $\partial G \in C^2$;

(2) *per ogni* $y \in \overline{G}$ $a(y) = (a_{ij}(y))$ *è una matrice simmetrica reale, ed esiste* $a_0 > 0$ *tale che per* $\sigma \in \mathbb{R}^r$ *e* $y \in \overline{G}$ $\langle a(y)\sigma, \sigma \rangle \geq a_0 \langle \sigma, \sigma \rangle$;

(3) $\alpha\delta + \beta\gamma \neq 0$.

Allora

a) $\forall \lambda \in \Sigma_\varphi$ *con* $|\lambda|$ *sufficientemente grande, qualunque siano* $f \in W^{0,1}_{p,2}(\Omega; Lu = 0)$, $f_1 \in B^{2-\frac{1}{p}}_{2,p}(G; u|_{\partial G} = 0)$, $f_2 \in B^{3-\frac{1}{p}}_{2,p}(G; u|_{\partial G} = 0, Pu|_{\partial G} = 0)$,[1] *il problema (4.1)–(4.3) ha una sola e una sola soluzione* u *in* $W^{2,2}_{p,2}(\Omega)$ *e vale la stima*

$$|\lambda|^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L_{p,2}(\Omega)} + \|u\|_{W^{1,1}_{p,2}(\Omega)} \leq C\left(\|f\|_{L_{p,2}(\Omega)} + \sum_{k=1}^{2} \left(\|f_k\|_{B^{k+1-\frac{1}{p}}_{2,p}(G)} + |\lambda|^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2p}} \|f_k\|_{L_2(G)} \right) \right).$$

b) il sistema delle autofunzioni generalizzate del problema (4.1)–(4.3) è completo nello spazio $L_2(\Omega)$.

Dimostrazione. a). Nello spazio di Hilbert $H = L_2(G)$ consideriamo l'operatore A tale che

$$D(A) = W^2_2(G; u|_{\partial G} = 0),$$
$$Au = -\sum_{i,j=1}^{r} a_{ij}(y) D_i D_j u(y) + \sum_{j=1}^{r} b_j(y) D_j u(y) + \lambda_0 u(y)$$

e per $x \in [0,1]$ sia $B(x)$ l'operatore tale che

$$B(x)u = b(x,y)u(y) - \lambda_0 u(y).$$

Allora il problema (4.1)–(4.3) diventa

$$\begin{aligned} &\lambda u(x) - u''(x) + Au(x) + B(x)u(x) = f(x), \qquad x \in]0,1[, \\ &\alpha u'(0) + \beta u'(1) + \gamma u(0) + \delta u(1) = f_1, \\ &\alpha u(0) - \beta u(1) = f_2, \end{aligned} \tag{4.4}$$

dove u e f sono funzioni a valori in H.

Se si sceglie opportunamente λ_0 il problema (4.4) soddisfa tutte le condizioni del teorema 3.3 e quindi si ottiene immediatamente a.

b). La dimostrazione si basa su un teorema (vedi [Ya2, Th. 2.2.10]) che garantisce la completezza del sistema degli autovettori generalizzati, purché siano soddisfatte una condizione sul comportamento del risolvente su opportune semirette e una condizione sugli s-numeri del risolvente (gli s-numeri sono gli autovalori dell'operatore $(A^*A)^{\frac{1}{2}}$). ■

References

[A] S. Agmon, *On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems*, Comm. Pure Appl. Math. **15** (1962), 119–147.

[1] Per $p = 2$ invece di $B^{3-\frac{1}{p}}_{2,p}(G; u|_{\partial G} = 0, Pu|_{\partial G} = 0)$ si ha $B^{\frac{5}{2}}_{2,2}(G; u|_{\partial G} = 0, Pu \in \widetilde{B}^{\frac{1}{2}}_{2,2}(G))$ [T, Th.4.3.3], dove $\widetilde{B}^s_{p,q}(G) = \{ u \mid u \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^r),\ \mathrm{supp}(u) \subset \overline{G} \}$.

[DS] N. Dunford e J. T. Schwartz, *Linear Operators. Part II. Spectral Theory*, Interscience, New York, 1963.

[DY] G. Dore e S. Yakubov, *Semigroup estimates and noncoercive boundary value problems*, Preprint.

[F] H. O. Fattorini, *The Cauchy Problem*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1983.

[GG] G. Geymonat e P. Grisvard, *Alcuni risultati di teoria spettrale per i problemi ai limiti lineari ellittici*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **38** (1967), 121–173.

[G] P. Grisvard, *Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications*, J. Math. Pures Appl. (9) **45** (1966), 143–290.

[Ko1] H. Komatsu, *Fractional powers of operators*, Pac. J. Math. **19** (1966), 285–346.

[Ko2] H. Komatsu, *Fractional powers of operators, II interpolation spaces*, Pac. J. Math. **21** (1967), 89–111.

[Kr1] S. G. Krein, *Linear Differential Equations in Banach Spaces*, American Mathematical Society, Providence, 1971.

[Kr2] S. G. Krein, *Linear Equations in Banach Spaces*, Birkhäuser, Boston, 1982.

[LP] J. L. Lions e J. Peetre, *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **19** (1964), 5–68.

[PS] J. Pruss e H. Sohr, *Imaginary powers of elliptic second order differential operators in L^p -spaces*, Hiroshima Math. J. **23** (1993), 161–192.

[T] H. Triebel, *Interpolation Theory. Function Spaces. Differential Operators*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[Ya1] S. Ya. Yakubov, *Linear Differential-Operator Equations and their Applications*, Elm, Baku, 1985.

[Ya2] S. Yakubov, *Completeness of Root Functions of Regular Differential Operators*, Longman, Scientific and Technical, New York, 1994.

[Ya3] S. Ya. Yakubov, *Noncoercive boundary value problems for elliptic partial differential and differential-operator equations*, Result. Math. **28** (1995), 153–168.

[Ya4] S. Ya. Yakubov, *Noncoercive boundary value problems for the Laplace equation with a spectral parameter*, Semigroup Forum **53** (1996), 298–316.